SUITES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

Exercice 1

On considère les suites de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \qquad g_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites de fonctions

Correction

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad \forall x \in [0,1]$$

a) Convergence simple

$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

Pour $x \in]0,1]$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$

b) Convergence uniforme

$$f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = 0$$

La suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \forall x \in [0,1]$$

a) Convergence simple

$\forall n \in \mathbb{N} : g_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = 1$

Pour $x \in]0,1]$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$

La suite (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

b) Convergence uniforme

La convergence n'est pas uniforme, car les fonctions g_n sont continues sur $[0,1]$ et la limite n'est pas continue

Exercice 2

On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme

Correction

$f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

a) Convergence simple

$\forall n \in N : f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$

Pour $x \in]0, +\infty[\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f(x) = 0$

b) Convergence uniforme

$f'_n(x) = \dfrac{n[1 - \ln(1+nx)]}{(1+nx)^2}$

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{e-1}{n}$ et $f_n(\dfrac{e-1}{n}) = \dfrac{1}{e}$

la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{e-1}{n}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{e-1}{n}, +\infty\right[$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) = \dfrac{1}{e} \neq 0$

La suite (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 3

On considère la suite de fonctions définies sur $[0, \pi]$ par

$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme

Correction

$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \quad \forall x \in [0, \pi] \quad n \geq 1$

a) Convergence simple

$\forall n \in N : f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$

Pour $x \in]0, \pi] \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

La suite (f_n) converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction $f(x) = 0$

b) Convergence uniforme

$f'_n(x) = n(2x - nx^2) \quad n \geq 1$

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $x = \dfrac{2}{n}$ et $f_n(\dfrac{2}{n}) = \dfrac{4e^{-2}}{n}$

la fonction f_n est croissante sur $\left]0, \dfrac{2}{n}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{2}{n}, \pi\right]$

$\sup\limits_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{4e^{-2}}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0,\pi]} f_n(x) = 0$

La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur $[0, \pi]$

SUITES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

Exercice 4

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite

de fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)$ définies sur l'intervalle $[0,1]$

Etudier la suite $g_n(x) = (-1)^n x^n(1-x)$

Correction

$f_n(x) = x^n(1-x) \quad \forall x \in [0,1] \quad n \geq 1$

a) Convergence simple

Pour $x \in [0,1]$, $\quad \forall n \in N \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$

b) Convergence uniforme

$f'_n(x) = x^{n-1}[n - x(n+1)] \quad n \geq 1$

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{n}{n+1} \quad$ et $\quad f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \dfrac{1}{n+1}$

la fonction f_n est croissante sur $\left]0, \dfrac{n}{n+1}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$

$$\sup_{x \in [0,\pi]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = 0$$

La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur $[0,1]$

Même résultat pour la suite de fonctions

$g_n(x) = (-1)^n x^n(1-x) \quad \forall x \in [0,1] \quad n \geq 1$

Exercice 5

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\,dx$

Correction

Soit la suite de fonctions

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{ne^x}{n+x}$$

a) Convergence simple

Pour $x \in [0,1] \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^x$

la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = x$

b) Convergence uniforme

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]}\frac{xe^x}{n+x} \leq \frac{e}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right| = 0$$

la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x)=e^x$

on peut donc utiliser le théorème d'intégration

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e-1$$

Exercice 6

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^T \frac{x^5}{(1+x^2)^n}dx$