SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Exercice 1

Développer en série de Fourier la fonction 2π – périodique définie

sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=|x|$

En déduire $A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ $B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$

Correction

f est de classe C^1 par morceaux, et est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier.

Puisque f est paire, ce développement est en série de cosinus, donc $b_n=0\ \forall n$

on calcule

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=-\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$

f est de classe C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f

$$\forall x\in[-\pi,\pi]\qquad |x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\qquad (1)$$

Dans (1), on remplace x par 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Or on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

On en déduit

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

On peut appliquer l'égalité de Parseval

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

En opérant comme précedemment, on déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Exercice 2

Développer en série de Fourier la fonction 2π – périodique impaire définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$

En déduire $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ $\quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$

Correction

f est de classe C^1 par morceaux, et est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier.
Puisque f est impaire, ce développement est en série de sinus, donc $a_n = 0 \ \forall n$
on calcule

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x(\pi-x)\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-2x)\cos nx}{n}dx\right\}$$

$$= \left[\frac{(\pi-2x)\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \left[-\frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^3}\left((-1)^{n+1} + 1\right)$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)^3}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge normalement vers f

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \qquad (1)$$

Dans (1), on remplace x par $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

On en déduit

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

On peut appliquer l'égalité de Parseval

$$\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\ (\pi - x)^2\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \pi^2\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

d'où

$$B = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Exercice 3

Développer en série de Fourier la fonction 2π – périodique définie

sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$

En déduire $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \qquad E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Correction

f est de classe C^1 par morceaux, et est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier.

Puisque f est paire, ce développement est en série de cosinus, donc $b_n = 0\ \forall n$

on calcule

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x \sin nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \cos nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \qquad (1)$$

Dans (1), on remplace x par π

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{d'où } A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans (1), on remplace x par 0

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$\text{d'où } B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

On a

$$C = \frac{A+B}{2} \quad \text{soit} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On peut appliquer l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\, dx$$

soit

$$\frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}$$

d'où

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

On écrit

$$D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = E + \frac{D}{16}$$

soit

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Exercice 4

Développer en série de Fourier la fonction 2π – périodique définie

sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = |\sin x|$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Correction

f est de classe C^1 par morceaux, et est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier.

Puisque f est paire, ce développement est en série de cosinus, donc $b_n = 0 \ \forall n$

on calcule

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{2n} = -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}$ et $a_{2n+1} = 0$

f est de classe C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f

$$\forall x \in [-\pi,\pi] \qquad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \qquad (1)$$

Dans (1), on remplace x par 0

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5

Développer en série de Fourier la fonction 2π – périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,2\pi[\\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Correction

La fonction vérifie les conditions de Dirichlet, elle est développable en série de Fourier

on calcule les coefficients de Fourier en intégrant sur $[0, 2\pi]$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = 0 \text{ si } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}$$

$$f : \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

En donnant à x la valeur $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 6

Soit f de période 2π telle que $f(x) = x^2 + \pi x$ sur $]-\pi, \pi[$

1) Former le développement en série de Fourier trigonométrique de f ainsi que la formule de Parseval pour f

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2) Déduire le développement de F de période 2π telle que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Correction

1) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\pi x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}x^2\,dx = \dfrac{\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\pi x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\pi x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi x\sin nx\,dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f\ :\ \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

2) f est continue en 0

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

f est discontinue en π

$$\frac{1}{2}\left[f(\pi^+)+f(\pi^-)\right] = \frac{1}{2}\left[0+2\pi^2\right] = \pi^2$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2 Egalité de Parseval

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\pi^2}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+2\pi x^3+\pi^2x^2)\,dx = \frac{16\pi^4}{15}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3) En intégrant, on a

$$F\ :\ \frac{\pi^3}{16} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left(\frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{3n} + \frac{4(-1)^n}{n^3}\right)\sin nx\right]$$

4) En appliquant l'égalité de Parseval

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Exercice 7

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f de période 2π

telle que $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Correction

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(n + \frac{1}{2})x + \cos(n - \frac{1}{2})x\right]dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(n - \frac{1}{2})x - \cos(n + \frac{1}{2})x\right]dx = \frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$f : \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}\left[\cos nx + 2n\sin nx\right]}{\pi(4n^2 - 1)}$$

f vérifie les conditions de Dirichlet, donc pour $x = \pi$

$$\frac{1}{2}(1 - 1) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 8

Soit f la fonction de période 2π telle que

$$f(x) = \begin{cases} -\pi x \text{ sur }]-\pi, 0[\\ x^2 \text{ sur }]0, \pi[\end{cases}$$

et soit $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ son développement en série de Fourier

1) Déterminer en fonction de a_n et b_n, les coefficients des développements en série de Fourier de f', f'' et f'''

2) En déduire pour $n > 0$ les valeurs de a_n et b_n

3) A partir du développement en série de Fourier de f', calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k + 1)^2}$

4) A partir du développement en série de Fourier de f calculer a_0 et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

5) Déduire du développement en série de Fourier de f' la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k + 1)^4}$

SERIES DE FOURIER
Exercices et corrections

Correction

1) f est continue sur $\mathbb{R}$. D'où

$a'_0 = 0 \qquad a'_n = nb_n \qquad b'_n = -na_n$

f' a sur $]-\pi, \pi]$ deux discontinuités

$x_1 = 0 \qquad s_1 = \pi$

$x_2 = \pi \qquad s_2 = -3\pi$

D'où $a''_0 = -\dfrac{1}{2\pi}(\pi - 3\pi) = 1$

$$a''_n = nb'_n - \frac{1}{\pi}(\pi - 3\pi\cos n\pi) = -n^2 a_n - \left[1 - 3(-1)^n\right]$$

$$b''_n = -na'_n = -n^2 b_n$$

f'' a sur $]-\pi, \pi]$ deux discontinuités

$x_1 = 0 \qquad s_1 = 2$

$x_2 = \pi \qquad s_2 = -2$

D'où $a'''_0 = -\dfrac{1}{2\pi}(2 - 2) = 0$

$$a'''_n = nb''_n - \frac{1}{\pi}(2 - 2\cos n\pi) = --n^3 b_n - \frac{2}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$b'''_n = -na''_n = n^3 a_n + n\left[1 - 3(-1)^n\right]$$

2) $f''' = 0 \Rightarrow a_n = \dfrac{3(-1)^n - 1}{n^2}$

et $b_n = -\dfrac{2}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right]$ soit $b_{2k} = 0$ et $b_{2k+1} = -\dfrac{4}{\pi(2k+1)^3}$

3) $f' : \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - 3(-1)^n}{n}\sin nx$

f' vérifie les conditions de Dirichlet

D'où pour $x = 0$ $\quad \dfrac{1}{2}\left[-\pi + 0\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

4) $f : a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^3}\sin(2k+1)x$

f vérifie les conditions de Dirichlet

pour $x = 0$ $\qquad 0 = a_0 + 3\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

pour $x = \pi$ $\qquad \pi^2 = a_0 + 3\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

De $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ on déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{n^2}$ puis $a_0 = \dfrac{5\pi^2}{12}$

5) L'égalité de Parseval pour f' donne

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{10}{n^2} - 6\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\, dx = \frac{7\pi^2}{3}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$