SERIES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

Exercice 1

Etudier les types de convergence pour les séries suivantes

a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x}$ sur $\mathbb{R}^+$

b) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + nx}$ sur $[0, \pi]$

c) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + \sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$

d) $f_n(x) = x^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$

e) $f_n(x) = (-x)^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$

f) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx + n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$

Correction

a) Si $x = 0$ alors $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$

La série diverge

b) Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et la série converge

Si $x > 0$, la série $f_n(x)$ converge d'aprè le critère d'Abel pour les séries numériques.

Mais la série $|f_n(x)|$ ne converge pas, il ne peut pas avoir convergence absolue

Enfin $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{\sin 1}{2}$ ne tend pas vers 0. Le terme général ne tend pas uniformément vers 0,

donc la série ne converge pas uniformément

c) La suite $v_n(x) = \dfrac{1}{nx + \sqrt{n}}$ est une suite décroissante de fonctions et $|v_n(x)| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Elle tend uniformément vers 0. La série converge uniformément d'après le critère d'Abel de convergence uniforme. Mais elle ne converge pas absolument pour $x = 0$

d) La série est une série géométrique et la somme de la série vaut

$$S(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Comme S n'est pas continue alors que f_n l'est, il n'y a pas convergence uniforme

Puisque la série est positive et convergente, elle converge absolument

e) La série converge absolument d'après d)

On a $|S(x) - S_n(x)| = x^{n+1} \dfrac{1 - x}{1 + x} \le x^{n+1}(1 - x) = g_n(x)$

Or g_n admet un maximum en $\dfrac{n+1}{n+2}$ qui vaut $g_n(\dfrac{n+1}{n+2}) \le \dfrac{1}{n+2}$ et tend vers 0

La série converge donc uniformément

Mais la série ne converge pas normalement

f) $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2}$ donc la série converge normalement

SERIES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

Exercice 2

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n^3}$ $(n \geq 1)$ sur $\mathbb{R}^+$

Montrer que la somme $S(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Correction

On a $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{n^2 (x+n)^{k+1}}$

donc $\left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \dfrac{k!}{n^{k+3}}$

si $x \geq 0$, la série $f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier k.

La somme S est donc une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 3

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^2 x + n}$ $(n \geq 1)$ sur $\mathbb{R}^+$

Correction

Posons $\left| f_n(x) \right| = v_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n}$

on a $\sup\limits_{x \geq 0} \left| f_n(x) \right| = \dfrac{1}{n}$

la série f_n ne converge pas normalement mais la suite v_n tend vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Par ailleurs pour x fixé, la suite $v_n(x)$ est décroissante

alors la série f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

SERIES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

Exercice 4

Etudier la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

Correction

La série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ car le terme général $f_n(x)$

pour x fixé non nul dans $\mathbb{R}_+$ est le terme général d une série numérique à termes positifs

convergente puisque équivalente à la série $\frac{1}{x^2n^3}$

.Le maximum de f_n sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en $x_n = \frac{1}{n^2}$ et $f_n(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n}$

et comme la série $\sum \frac{1}{2n}$ est divergente, on n'a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+$

Pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x) \geq N \frac{Nx}{1+(2N)^4x^2}$$

d'où $R_N(\frac{1}{N^2}) \geq \frac{1}{17}$ et donc la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$

Le problème s'est posé en 0 donc on regarde sur des intervalles $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$

Sur un tel intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, $f_n(x) \leq \frac{1}{n^3\varepsilon}$ et la série $\sum \frac{1}{n^3\varepsilon}$ converge donc il y a

convergence normale et donc convergence uniforme

Exercice 5

Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la série de terme général $f_n(x)$
2. Trouver un équivalent de la somme $f(x)$ en $+\infty$

Correction

Les fonctions f_n sont strictement positives et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

- Etude de la convergence simple

si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(x)$ diverge

si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2x^2}$ converge

Donc la somme $f(x) = \sum f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et par parité on se restreint à $\mathbb{R}_+^*$

- Etude de la convergence normale et uniforme

par exemle $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ et donc $\sum f_n(\frac{1}{n})$ diverge, il n'y a ni convergence normale,

ni convergence uniforme sur $]0, +\infty[$

par contre sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$ est fixé, il t a convergence normale

et donc convergence uniforme puisque

$$\forall x \geq a, \qquad \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2} \leq \frac{1}{a^2n^2} \text{ et } \sum \frac{1}{a^2n^2} \text{ converge}$$

SERIES DE FONCTIONS
Exercices et corrections

- Etude de la classe de f

les f_n sont continues et $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur tout $[a,+\infty[$, $a>0$

donc f est continue sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$. Donc f est continue sur $]0,+\infty[$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la série des dérivées de terme général $f'_n(x)=-\dfrac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$

converge normalement sur tout $[a,+\infty[$, $a>0$

Comme on a convergence normale et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ existe et vaut 0 pou tout n,

on applique le théorème d'interversion des limites

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

- Equivalent en $+\infty$

Puisque $\dfrac{x^2}{(1+n^2x^2)}\underset{x\to+\infty}{\to}\dfrac{1}{n^2}$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

on applique le théorème d'interversion des limites à la fonction

$g(x)$ avec $g_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+n^2x^2)}$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$

Finalement $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{6x^2}$