Chapitre 9
SÉRIES DE FOURIER

Définition 1

On appelle **SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE** toute série de fonctions $\sum f_n$
où $f_n : t \mapsto a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ avec (a_n), (b_n) des suites réelles.

REMARQUES

- Si $\sum f_n$ est trigonométrique, alors les f_n sont $\frac{2\pi}{\omega}$-périodiques car $f_n(t + \frac{2\pi}{\omega}) = f_n(\frac{2\pi}{\omega})$
- Si $\sum f_n$ est trigonométrique et $\sum f_n$ CVS sur I vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, alors S est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

  En effet, on a $\underset{\substack{\downarrow\\ S(t+\frac{2\pi}{\omega})}}{S_n(t + \frac{2\pi}{\omega})} = \underset{\substack{\downarrow\\ S(\frac{2\pi}{\omega})}}{S_n(\frac{2\pi}{\omega})}$
- Les séries de FOURIER étudient la réciproque de la 2e remarque,
  i.e. étant donnée une fonction f 2π-périodique, existe-t-il (a_n) et (b_n) telles que :

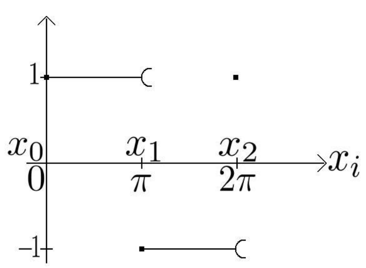
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Dans la suite du cours, $\omega = 1 \longrightarrow$ la période considérée sera égale à 2π.

Définition 2

On dit que $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est **CONTINUE PAR MORCEAUX** sur $[0, 2\pi]$ si f est continue sur $[0, 2\pi]$ sauf en un nombre fini (éventuellement nul) de points x_i pour lesquels f admet une limite à gauche $\left(\text{notée } f(x_i^-) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_i - h)\right)$ et à droite $\left(\text{notée } f(x_i^+) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} f(x_i + h)\right)$
i.e. s'il existe $x_0, \ldots, x_n$ dans $[0, 2\pi]$ tels que

1) $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi$
2) $\forall i \in [[0..n-1]], f$ continue sur $]x_i, x_{x+1}[$
   et f admet une limite à gauche en x_i (pour $i \neq 0$) et à droite en x_i (pour $i \neq n$).



$f(\pi^-) = 1$
$f(\pi^+) = -1$

NOTATION

- $C^0_m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
- $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Remarques

- ✘ $C^0 \subset C^0_n$
- ✘ Si $f \in C^0_{n,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x_0, \dots, x_n$ constituent une subdivision de $[0, 2\pi]$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$

Définition 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
On appelle **cœfficients de Fourier** (réel) associés à f les cœfs a_n et b_n définis par :
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$
$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$

On appelle **série de Fourier de** f la série définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

Remarques

- ✘ En toute rigueur, la série de Fourier de f est la série de fonctions $\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum f_n$ où : $f_n : x \mapsto a_n(f)\cos(nx) + b_n\sin(nx)$

- ✘ Certains auteurs définissent à part $a_0(f)$ d'une façon différente, à savoir : $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ et la série de Fourier de f sera alors définie par : $a_0(f) + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$

- ✘ Comme f, sin et cos sont 2π-périodiques, on a :
$$\left.\begin{array}{l} a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{array}\right\} \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

- ✘ Plus généralement, si f est T-périodique, alors
$$\begin{array}{l} a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos(n\omega x)dx \\ b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin(n\omega x)dx \end{array} \quad (\text{où } \omega = \tfrac{2\pi}{T})$$

  La série de Fourier de f est alors définie par :
  $\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)$

- ✘ Il n'est pas évident que la série de Fourier de f CVS sur $\mathbb{R}$ et il est encore moins évident (c'est même faux) que sa limite vaut f.

Proposition 1

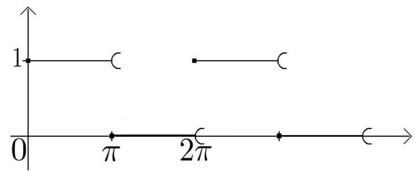
Soit $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $\begin{cases} f \text{ paire} \Longrightarrow b_n(f) = 0 \\ f \text{ impaire} \Longrightarrow a_n(f) = 0 \end{cases}$

Preuve 1

1. f paire, alors $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ impaire
   donc $b_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$
2. f impaire, alors $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ impaire
   donc $a_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$

Exemple

Soit $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, 2\pi[\\ 0 \text{ si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$



$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} b_{2p}(f) = 0 \\ b_{2p+1}(f) = \dfrac{2}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

La série de Fourier de f est : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{2p+1}\sin((2p+1)x)$

REMARQUE
Lorsque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on utilise plutôt les cœfficients de Fourier complexes de f notés $c_n(f)$ et définis dans la proposition qui suit.

Proposition 2 (définition)

Soit $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier de f est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} \qquad \text{où } c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Preuve 2

La série de Fourier de f est :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n(f) \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n(f) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} e^{inx} + \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} e^{-inx}$$

Notons $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$

alors $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) - i f(x) \sin(nx) dx = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

de même $\dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx = c_{-n}(f)$

REMARQUES

✘ Si $f \in C^0_{m,T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f est $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega t}$

où $c_n(t) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx$ et $\omega = \dfrac{1\pi}{T}$

✘ $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ CV signifie $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + u_{-n})$ CV i.e. $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k + u_{-k}) \right)$ CV i.e. $\left(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} u_k \right)$ CV

Définition 4

Soit E un $\mathbb{C}$-ev.
On appelle **PRODUIT SCALAIRE** sur E tout forme

- ✘ **SESQUILINÉAIRE** (i.e. linéaire à droite et antilinéaire à gauche)
- ✘ **HERMITIENNE** $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
- ✘ **DÉFINIE** et **POSITIVE** sur E.

OBSERVATION
Antilinéaire signifie $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \overline{\lambda} \varphi(x, z) + \overline{\mu} \varphi(y, z)$

Exemples

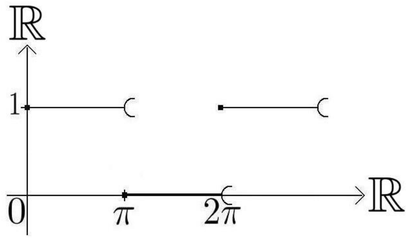
1. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), (A, B) \in E^2$
   $\varphi : (A, B) \mapsto tr({}^t\overline{A}B)$
   φ est un produit scalaire sur E.
   En effet,
   - ✘ φ est antilinéaire à gauche car
     $$\begin{aligned}\varphi(A + \lambda B, C) &= tr({}^t(\overline{A + \lambda B})C) = tr({}^t(\overline{A} + \overline{\lambda} \cdot \overline{B})C) \\ &= tr({}^t\overline{A}C) + \overline{\lambda}tr({}^t\overline{B}C) = \varphi(A, C) + \overline{\lambda}\varphi(B, C)\end{aligned}$$
   - ✘ φ est linéaire à droite
   - ✘ φ est hermitienne car
     $$\varphi(B, A) = tr({}^t\overline{B}A) = tr\left({}^t({}^tA\overline{B})\right) = tr({}^tA\overline{B}) = tr\left(\overline{{}^t\overline{A}B}\right) = \overline{tr({}^t\overline{A}B)} = \overline{\varphi(A, B)}$$
   - ✘ Montrons que φ est positive.
     Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\varphi(A, A) = tr({}^t\overline{A}A) \geqslant 0$
     $A = (a_{ij})$
     $\overline{A} = (b_{ij})$ où $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$
     ${}^t\overline{A} = (c_{ij})$ où $c_{ij} = b_{ji} = \overline{a_{ji}}$
     ${}^t\overline{A}A = (d_{ij})$ où $d_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj}$
     $tr({}^t\overline{A}A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(d_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}a_{ki}$
     d'où $\varphi(A, A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2 \geqslant 0$
   - ✘ φ est définie car $\varphi(A, A) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \forall (i, j) \in [[1..n]]^2 \\ |a_{ki}|^2 = 0 \end{cases}$
     $$\Longrightarrow A = 0$$

2. $E = C^0([a, b], \mathbb{C})$
   $\varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b \overline{f}(t)g(t)dt$
   φ est un produit scalaire sur E.

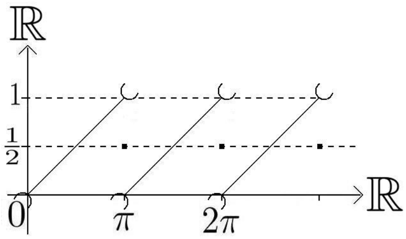
Notation

On note $\mathscr{D} = \left\{ f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telle que } \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \right\}$

Exemple



$\notin \mathscr{D}$



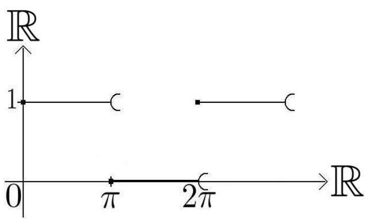
$\in \mathscr{D}$

REMARQUE
Lorsque $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ne vit pas dans $\mathscr{D}$, il est facile de la transformer de telle sorte qu'elle soit dans $\mathscr{D}$, comme le montre la définition suivante.

Définition 5

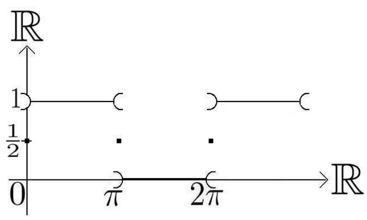
Soit $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On appelle **RÉGULARISÉE** de f la fonction notée $\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) \end{cases}$



G_f

$\longrightarrow$



$G_{\widetilde{f}}$

Proposition 3

L'application $\varphi : (f,g) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{D}$.

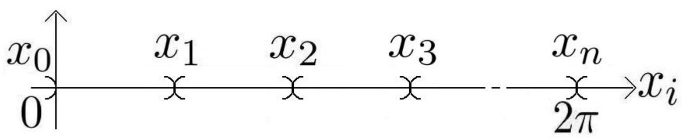
Preuve 3

φ est clairement sesquilinéaire, hermitienne et positive. Montrons que φ est définie.

Soit $f \in \mathscr{D}$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. Montrons que $f = 0$.
Comme $f \in \underset{C^0_{m,2\pi}}{\underset{\cap}{\mathscr{D}}}$, il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[0, 2\pi]$ telle que f continue sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite à gauche et à droite en x_i.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \varphi(f,f) = 0 &\iff \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{f}(t)f(t)dt = 0 \\ &\iff \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)|^2dt = 0 \end{aligned}$$

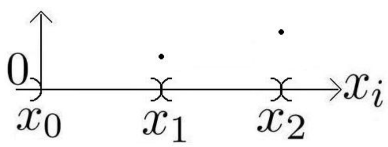
donc $\forall i \in [[0..n-1]] \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)|^2 dt = 0$
d'où $\forall i \in [[0..n-1]] \quad \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\quad |f(t)|^2 = 0$
d'où $\forall i \in [[0..n-1]] \quad \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\quad f(t) = 0$
i.e. f est nulle sur $[0, 2\pi]$, sauf éventuellement aux points x_i.



or $f \in \mathscr{D}$ donc $f(x_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_i^+) + f(x_i^-)\right) = 0$
i.e. f nulle sur $[0, 2\pi]$ donc sur $\mathbb{R}$ car f est 2π-périodique.

REMARQUES

- ✘ φ est un produit scalaire sur $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- ✘ φ n'est pas un produit scalaire sur $C^0_m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$



- ✘ $\forall f \in \mathscr{D}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = < e_n, f >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$

Proposition 4

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $(\mathscr{D}, <,>)$

Preuve 4

Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Montrons que $< e_n, e_m >= \delta_{n,m}$ où $e_n : t \mapsto e^{int}$

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e_n}(t)e_m(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt$$

Si $m \neq n$

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi i(m-n)} \left[e^{i(m-n)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(m-n)} \left(\underbrace{e^{i \overbrace{(m-n)}^{\in \mathbb{Z}} 2\pi}}_{1} - 1 \right)$$

Si $m = n$

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1$$

THÉORÈME 1 : BESSEL

Soit $f \in \mathscr{D}$.

Alors $\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Preuve 1

RAPPEL : $(e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de F sev de $(E, <,>)$

alors $\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i$

Notons $G_N = Vect\left((e_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}\right)$.
$(e_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ famille orthonormée, donc orthogonale, et donc libre
d'où par définition de G_N, $(e_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ constitue une orthonormée de G_N.

D'où (par le rappel) : $\forall f \in \mathscr{D} \quad p_{G_N}(f) = \sum_{n=-N}^{N} < e_n, f > e_n = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$

or $\|f\|^2 = \| \underbrace{f - p_{G_N}(f)}_{\in G_N^{\perp}} + \underbrace{p_{G_N}(f)}_{\in G_N} \|^2 \overset{\text{Pythagore}}{\overset{\downarrow}{=}} \|f - p_{G_N}(f)\|^2 + \|p_{G_N}(f)\|^2$

donc $\|f\|^2 \geqslant \|p_{G_N}(f)\|^2$

$$\begin{aligned} \text{où } \|p_{G_N}(f)\|^2 &=< \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n, \sum_{m=-N}^{N} c_m(f) e_m > \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n(f)} \sum_{m=-N}^{N} c_m(f) \underbrace{< e_n, e_m >}_{\delta_{n,m}} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n(f)} c_n(f) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

THÉORÈME 2 : RIEMANN - LEBESGUE

Soit $f \in \mathscr{D}$.

Alors $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$ i.e. $\begin{cases} c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ c_{-n}(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

Preuve 2

Par BESSEL, on a : $|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) \leqslant \|f\|^2 \quad [\star]$

Observons d'un œil attentif la série numérique $\sum \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)$.
Elle est à termes positifs, or par $[\star]$, la suite des sommes partielles associée à cette série est majorée donc elle converge, donc son terme général tend vers 0, d'où le THÉORÈME.

Proposition 5

Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Alors $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = 0 \implies f = 0$

Preuve 5

On a $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = 0 \quad [\star\star]$

Par le théorème de WEIERSTRASS, il existe une suite (P_N) de polynômes trigonométriques telle que :
$\|f - P_N\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ (i.e. (P_N) CVU vers f sur $\mathbb{R}$)

$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} p_n e^{int}$

$[\star\star] \implies \int_0^{2\pi} f(t)\overline{P_N(t)}dt = 0$

or $\overline{(P_N)}$ CVU sur $\overline{f}$ sur $\mathbb{R}$

d'où $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{P_N(t)}dt = 0$

et $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{P_N(t)}dt = \int_0^{2\pi} f(t) \lim_{N\to+\infty} \overline{P_N(t)}dt = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

donc $f(t) = 0$ sur $[0, 2\pi]$ d'où $f = 0$ sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Corollaire 5.1

Soit $(f, g) \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Alors $c_n(f) = c_n(g) \implies f = g$

Preuve 5.1

$c_n(f) = c_n(g) \iff < e_n, f >=< e_n, g >$
donc $< e_n, f - g >= 0$ i.e. $c_n(f - g) = 0$
d'où par la proposition précédente, $f = g$.

Théorème 3 : Parseval

Soit $f \in \mathscr{D}$.
Alors $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 \quad \left(= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)$
Et si f est à valeurs réelles : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f))$

Preuve 3

Soit $h(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} f(t + x) dt$
Montrons que :

1. $c_n(h) = |c_n(f)|^2$
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e_n \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
3. $c_n\left(\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e_n\right) = c_n(h)$

1. $$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}f(t+x)dt\right)e^{-inx}dx$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\overline{f}(t)\left(\int_0^{2\pi} f(t+x)e^{-inx}dx\right)dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\overline{f}(t)e^{int}\left(\int_0^{2\pi} f(t+x)e^{-in(t+x)}dx\right)dt$$
changement de variable : $u = t + x$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\overline{f}(t)e^{int}\left(\int_t^{t+2\pi} f(u)e^{-inu}du\right)dt$$

or $\displaystyle\int_t^{t+2\pi} f(u)e^{-inu}du = \int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}du = 2\pi c_n(f)$ donc :
$c_n(h) = \dfrac{1}{2\pi}c_n(f)\displaystyle\int_0^{2\pi}\overline{f}(t)e^{int}dt = c_n(f)\overline{c_n(f)} = |c_n(f)|^2$

2. La série de Fourier s'écrit donc : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(h)e_n \overset{(1.)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 e_n$
or cette série CVN (donc CVU) sur $\mathbb{R}$
car $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| |c_n(f)|^2 e_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \underbrace{\|e_n\|_\infty}_{\sup_{t\in\mathbb{R}}|e^{int}|=1}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ CV (par BESSEL)
d'où la somme de cette série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e_n$ est continue (et 2π-périodique) sur $\mathbb{R}$.

3. $$c_n\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e_n\right) =< e_n, \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m(f)|^2 e_m >$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m(f)|^2 \underbrace{< e_n, e_m >}_{\delta_{n,m}} = |c_n(f)|^2 \overset{(1.)}{=} c_n(h)$$

d'où par une proposition antérieure , on a $h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e_n$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ \ h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 e^{inx}$

En particulier, $h(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Si f est à valeurs réelles :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 &= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \\
&= \frac{a_0^2(f)}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}\right|^2 + \left|\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\right|^2\right) \\
&= \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f) + a_n^2(f) + b_n^2(f)\right) \\
&= \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)
\end{aligned}$$

REMARQUE
Sans hypothèse supplémentaire, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ car $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|c_n(f)e_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \underbrace{\|e_n\|_\infty}_{1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ qui ne converge pas forcément.

Définition 6

On dit que $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \left[\begin{array}{c}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{array}\right.$, 2π-périodique est C^1 par morceaux
et on écrit $f \in C^1_{m,2\pi}\left(\mathbb{R}, \left[\begin{array}{c}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{array}\right.\right)$ si $\exists(x_0, \ldots, x_n) \in [0, 2\pi]^{n+1}$ telle que :

- ✘ $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi$
- ✘ f continue sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ et $f(x_i^+)$ et $f(x_i^-)$ existent.
- ✘ f dérivable sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ et $f'(x_i^+)$ et $f'(x_i^-)$ existent.

THÉORÈME 4 : DIRICHLET

- ✘ Soit $f \in C^1_{m.2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
  Alors la série de Fourier de f CVS sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\widetilde{f}$ de f, i.e. :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = \widetilde{f}(x) \qquad \left(= \tfrac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))\right)$$
- ✘ Soit $f \in C^1_{m.2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  Alors la série de Fourier de f CVS sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\widetilde{f}$ de f, i.e. :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) = \widetilde{f}(x)$$

Lemme 4.1

Notons $s_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

Alors pour $t \neq 0$, $s_N(t)\dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Preuve 4.1

$$s_N(t) = \sum_{n=0}^{N}\left(e^{int} + e^{-int}\right) - 1 = \sum_{n=0}^{N}\left(e^{it}\right)^n + \sum_{n=0}^{N}\left(e^{-it}\right)^n - 1 \overset{\overset{t\neq 0}{\downarrow}}{=} \frac{1-e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{1-e^{-i(N+1)t}}{1-e^{-it}} - 1$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{N+1}{2}\right)t}}{e^{\frac{it}{2}}}\left(\frac{e^{-i\left(\frac{N+1}{2}\right)t} - e^{i\left(\frac{N+1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}}\right) + \frac{e^{-i\left(\frac{N+1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}}}\left(\frac{e^{i\left(\frac{N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{N+1}{2}\right)t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}\right) - 1$$

$$= e^{i\frac{N}{2}t}\frac{-2i\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-i\frac{N}{2}t}\frac{2i\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(e^{i\frac{N}{2}t} + e^{-i\frac{N}{2}t}\right) - 1$$

$$= \frac{2\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)\cos\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Preuve 4 (DIRICHLET)

Notons $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$

Montrons que $S_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \widetilde{f}(x)$

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)s_N(x-t)dt$$

$$\overset{\overset{u=x-t}{\downarrow}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)s_N(u)(-du) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)s_N(t)dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)s_N(t)dt}_{A_N(x)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)s_N(t)dt}_{B_N(x)}$$

■ $$A_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(x-t)-f(x^+)+f(x^+)\right)S_N(t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(x-t)-f(x^+)\right)S_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^+)S_N(t)dt$$

✘ $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(x-t)-f(x^+)\right)S_N(t)dt \overset{\text{LEMME}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(x-t)-f(x^+)\right)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

or $\dfrac{f(x-t)-f(x^+)}{-t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} f'(x^+)$ (qui existe par hypothèse)

donc $\dfrac{f(x-t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -2\cdot \underbrace{\dfrac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x\to 0^-]{}1} \cdot \dfrac{f(x-t)-f(x^+)}{-t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} -2f'(x^+)$

donc $g : t \longmapsto \dfrac{f(x-t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ continue par morceaux sur $[-\pi, 0]$

d'où $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0} g(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{RIEMANN LEBESGUE}} 0$

✘ $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^+)S_N(t)dt = \frac{f(x^+)}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\sum_{n=-N}^{N} e^{int}dt$$

$$= \frac{f(x^+)}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(e^{int}+e^{-int}\right)-1\right)dt = \frac{f(x^+)}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{N}\int_{-\pi}^{0}\left(e^{int}+e^{-int}\right)dt - \int_{-\pi}^{0}dt\right)$$

$$= \frac{f(x^+)}{2\pi}\left(\overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{cas } n=0}}{\int_{-\pi}^{0}(1+1)dt}}^{2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{in}\left[e^{int}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{in}\left[e^{-int}\right]_{-\pi}^{0}\right) + (-\pi)\right)$$

$$= \frac{f(x^+)}{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{in}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{1}{in}\left(1-(-1)^n\right)\right) + \pi\right)$$

$$= \frac{f(x^+)}{2}$$

D'où $A_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 + \dfrac{f(x^+)}{2} = \dfrac{f(x^+)}{2}$

■ $B_N(x)$ se traite de la même manière en écrivant $f(t-x) = f(t-x) - f(x^-) + f(x^-)$
et on trouve que $B_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{f(x^-)}{2}$

D'où $S_N(x) = A_N(x) + B_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

Proposition 6

1. Soit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   alors $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$

2. Soit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f') \\ b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f') \end{cases}$

Preuve 6

1. $$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{in} \overbrace{\left[f(t) e^{int} \right]_0^{2\pi}}^{0} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{in} c_n(f') \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} u(t) &= f(t) & \Longrightarrow \quad u'(t) &= f'(t) \\ v(t) &= -\tfrac{1}{in} e^{-int} & \Longleftarrow \quad v'(t) &= e^{-int} \end{aligned}$$

2. ✘ $$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \overbrace{\left[f(t) \sin(nt) \right]_0^{2\pi}}^{0} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin(nt) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n} b_n(f') \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} u(t) &= f(t) & \Longrightarrow \quad u'(t) &= f'(t) \\ v(t) &= \tfrac{1}{n} \sin(nt) & \Longleftarrow \quad v'(t) &= \cos(nt) \end{aligned}$$

   ✘ $$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \overbrace{\left[f(t) \cos(nt) \right]_0^{2\pi}}^{0} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos(nt) dt \right) \\ &= \frac{1}{n} a_n(f') \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} u(t) &= f(t) & \Longrightarrow \quad u'(t) &= f'(t) \\ v(t) &= -\tfrac{1}{n} \cos(nt) & \Longleftarrow \quad v'(t) &= \sin(nt) \end{aligned}$$

THÉORÈME 5 : WIRTINGER

Soit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$
alors $\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt$

Preuve 5

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \overset{\substack{\text{par hypothèse} \\ \downarrow}}{=} 0$$
$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = 0 \quad \text{(car } f \text{ } 2\pi\text{-périodique)}$$

Appliquons PARSEVAL à f :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$$

Par la proposition précédente, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left| -\frac{1}{in} c_n(f') \right|^2 + \left| \frac{1}{in} c_{-n}(f') \right|^2 \right)$$
donc $2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) = \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \quad [\star]$

Appliquons PARSEVAL à f' :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt$$
i.e. $2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) = \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt \quad [\star\star]$

$[\star]$ et $[\star\star]$ donnent le résultat.

Exercice 1

1. Donner la série de Fourier de la fonction f de période 2 définie sur $[-1, 1[$ par :

$$f(t) = e^{i\pi z t} \qquad \text{où } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \qquad \text{(fixé)}$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

Solution 1

$$\left[\begin{array}{ll} \text{RAPPEL :} & \text{Quand } f \text{ est } T\text{-périodique} \\ & c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad \text{où } \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right]$$

1. $c_n(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{i\pi z t}e^{-i\pi n t}dt = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\pi \overbrace{(z-n)}^{\neq 0} t}dt$

$$= \frac{1}{2i\pi(z-n)}\left[e^{i\pi(z-n)t}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2i\pi(z-n)}\left(e^{i\pi(z-n)} - e^{-i\pi(z-n)}\right)$$

or $e^{i\pi(z-n)} = e^{i\pi z}e^{-i\pi n} = (-1)^n e^{i\pi z}$
et $e^{-i\pi(z-n)} = (-1)^n e^{-i\pi z}$

donc $c_n(f) = \dfrac{(-1)^n}{2i\pi(z-n)}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)$

La série de Fourier de f est $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\pi t}$

2. Notons à présent $z = x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

PARSEVAL $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2i\pi(x-n)}\left(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|e^{i\pi \overset{\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}{\overset{\downarrow}{x}} t}|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt = 1$$

i.e. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2(x-n)^2} = 1$

i.e. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$

Exercice 2

1. Donner la série de Fourier de la fonction f de période 2 définie sur $[-1, 1[$ par :

$$f(t) = \cos(\pi x t) \quad \text{où } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

2. En déduire :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

Réponse 2

1. $c_n(f) = \dfrac{(-1)^n \cdot \sin(\pi x)}{\pi(x^2 - n^2)}$

2. Appliquer DIRICHLET