Chapitre 8
SÉRIES DE FONCTIONS

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I.
On appelle **SÉRIE DE FONCTIONS** de terme général f_n notée $\sum f_n$ la suite de fonctions (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemples

1. $\sum f_n$ où $f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array} \right.$

2. $\sum f_n$ où $f_n : \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array} \right.$

REMARQUE
Soit $\sum f_n$ où $f_n : I \to \mathbb{R}$.
Alors $\forall x \in I \quad \sum f_n(x)$ est une suite numérique, i.e. $(S_n(x))$ est une suite numérique (réelle).

Définition 2

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ où les $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- ✘ On dit que $\sum f_n$ **CONVERGE SIMPLEMENT** sur I (resp. sur $J \subset I$) si $\forall x \in I$ (resp. $\forall x \in J$), la suite numérique $\sum f_n(x)$ converge i.e. si $\forall x \in I$ (resp. $\forall x \in J$), la suite numérique $(S_n(x))$ converge.
- ✘ On appelle alors **SOMME** de la série la fonction notée S ou $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ définie sur I (resp. sur J) par : $\forall x \in I$ (resp. $\forall x \in J$) $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- ✘ On appelle aussi **RESTE** de la série la suite de fonctions notée R_n définie sur I (resp. sur J) par : $\forall x \in I$ (resp. $\forall x \in J$) $\displaystyle R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

REMARQUES

- ✘ Etudier la CVS de $\sum f_n$ sur I revient à étudier, après avoir fixé un x dans I, la série numérique $\sum f_n(x)$.
- ✘ On a, si $\sum f_n$ CVS vers S sur I, $R_n = S - S_n$.

Exemples

1. $f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array} \right.$

Etudions la CVS de $\sum f_n$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudions la série numérique $\sum x^n$.

On a $\sum x^n$ CV $\iff |x| < 1$

En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ si } x \neq 1 \\ \\ n + 1 \text{ si } x = 1 \end{array} \right.$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$ existe et est finie ssi $|x| < 1$

Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $]-1,1[$ vers $S : \left\{ \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right.$

2. $f_n : \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array} \right.$

Etudions la CVS de $\sum f_n$.
Soit $x \in [0,1]$. Etudions la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

C'est une série numérique alternée or $\left(\left|\dfrac{(-1)^n x^n}{n}\right|\right) = \left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0.

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = \underbrace{x}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leqslant 1} \leqslant 1 \right)$$

Ainsi la suite numérique $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ CV, i.e. $\sum f_n$ CVS sur $[0,1]$.

REMARQUE
$\sum f_n$ CVS vers S sur $I \iff \forall x \in I \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant N \implies |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Définition 3

On dit que $\sum f_n$ **CONVERGE UNIFORMÉMENT** sur I si (S_n) converge uniformément sur I.

REMARQUES

1. $\sum f_n$ CVU vers S sur $I \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant N \implies \forall x \in I \ \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$
2. $\sum f_n$ CVU sur $I \implies \sum f_n$ CVS sur I
3. $\left. \begin{array}{l} (f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \\ (g_n) \text{ CVU vers } g \text{ sur } I \end{array} \right\} (f_n + g_n)$ CVU vers $f + g$ sur I.
   $\left(\ \forall x \in I \ \ |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \right)$

Proposition 1

$$\sum f_n \text{ CVU sur } I \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} (f_n) \text{ CVU vers la fonction nulle sur } I \\ \|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array} \right]$$

Preuve 1

$f_n = S_n - S_{n-1}$
or $\left. \begin{array}{l} (S_n) \text{ CVU vers } S \text{ sur } I \\ (S_{n-1}) \text{ CVU vers } S \text{ sur } I \end{array} \right\} \overset{(3.)}{\Longrightarrow} (f_n) = (S_n - S_{n-1})$ CVU vers la fonction nulle sur I.

REMARQUE
Cette proposition est utile par sa contraposée, i.e. $\|f_n\|_\infty \not\to 0 \Longrightarrow \sum f_n$ ne CV pas uniformément sur I.

Proposition 2

On suppose $\sum f_n$ CV sur I.
$\sum f_n$ CVU sur $I \Longleftrightarrow (R_n)$ CVU vers la fonction nulle sur I.

Preuve 2

$\boxed{\Rightarrow}$ $R_n = S - S_n$
or (S_n) CVU vers S sur I
d'où (R_n) CVU vers la fonction $S - S = 0$ (où $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$)

$\boxed{\Leftarrow}$ $S_n = S - R_n$
or (R_n) CVU vers la fonction nulle sur I
d'où (S_n) CVU vers la fonction $S - 0 = S$ sur I

Exemples

1. $f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \end{array} \right.$

Etude de la convergence simple :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Etudions la nature de $\overbrace{\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}}^{\text{série numérique}}$.

On a $n^2 \cdot nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$
donc $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ CV, i.e. $\sum f_n$ CV sur $\mathbb{R}^+$.

Etude de la convergence uniforme de f_n sur $\mathbb{R}^+$:
A-t-on (f_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, i.e. a-t-on $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

$f_n'(x) = n(2x - \sqrt{n}x^2)e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - \sqrt{n}x)e^{-x\sqrt{n}}$

x	0	$\frac{2}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

donc $\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\text{Sup}}|f_n(x)| = \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$
donc (f_n) ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$
donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2. $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n+n^3x^2} \end{cases}$

Etude de la CVS de $\sum f_n$:
Soit $x \in \mathbb{R}^+$
si $x = 0$ $f_n(x) = \frac{1}{n}$ d'où $\sum f_n(x)$ DV
si $x \neq 0$ $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2}$ or $\sum \frac{1}{n^3}$ CV d'où $\sum f_n(x)$ CV
Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$

Etude de la CVU de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{\text{Sup}}|f_n(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *i.e.* $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$
on ne peut rien conclure pour l'instant.

	0	$+\infty$
f_n	$\Vert\ \frac{1}{n} \searrow$	0

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k+k^3x^2} \quad \text{(on minore par les } n \text{ premiers termes)}$$

$$\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+k^3x^2} \geqslant \underbrace{n}_{\text{nombre de termes}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2n+8n^3x^2}}_{\text{terme le plus petit}} = \frac{1}{2+8n^2x^2}$$

or $R_n(\frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{10} \not\to 0$ ainsi $\|R_n\|_\infty \not\to 0$

donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$

REMARQUE
La proposition précédente est particulièrement adaptée aux séries alternées car :
si (u_n) est alternée et vérifie le critère spécial, alors $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Exemple

$\sum f_n$ où $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n} \end{cases}$

Etude de la CVS :
Soit $x \in [0,1]$
alors la suite numérique $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ CV par le critère spécial

en effet, $\left(\left|\dfrac{(-1)^n x^n}{n}\right|\right) = \left(\dfrac{x^n}{n}\right) \searrow et \longrightarrow 0$

donc $\sum f_n$ CVS sur $[0,1]$.

Etude de la CVU sur $[0,1]$:
Soit $x \in [0,1]$
comme la série alternée $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ vérifie le critère spécial, on a :
$|R_n(x)| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right| \underset{x\in[0,1]}{\leqslant} \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$
donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$.

Définition 4

On dit que $\sum f_n$ **CONVERGE NORMALEMENT** sur I si
$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} f_n \text{ bornée} \\ \sum \underset{x\in I}{\text{Sup}}|f_n(x)| \text{ CV} \qquad \left(\text{i.e. } \sum \|f_n\|_\infty \text{ CV}\right) \end{cases}$

Proposition 3

$$\sum f_n \text{ CVN sur } I \iff \exists(\alpha_n) \text{ suite numérique telle que } \begin{cases} \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leqslant \alpha_n \\ \sum \alpha_n \text{ CV} \end{cases}$$

Preuve 3

$\boxed{\Rightarrow}$ $\alpha_n = \underset{x\in I}{\text{Sup}}|f_n(x)|$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $\forall x \in I \quad |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, alors $\underset{x\in I}{\text{Sup}}|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$
or $\sum \alpha_n$ CV $\Rightarrow \sum \underset{x\in I}{\text{Sup}}|f_n(x)|$ CV
$\Rightarrow \sum f_n$ CVN sur I

Définition 5

On dit que $\sum f_n$ **CONVERGE ABSOLUMENT** sur I si
$\forall x \in I \quad \sum |f_n(x)|$ converge.

Proposition 4

1. $\sum f_n$ CVA sur $I \implies \sum f_n$ CVS sur I
2. $\sum f_n$ CVN sur $I \implies \sum f_n$ CVS sur I

Preuve 4

1. On a $\forall x \in I \quad \sum |f_n(x)|$ CV $\underset{\text{THM séries numériques}}{\implies} \forall x \in I \quad \sum f_n(x)$ CV

2. $\forall x \in I \quad |f_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in I}|f_n(x)|$

$$\text{or } \sum \operatorname*{Sup}_{x\in I}|f_n(x)| \text{ CV} \Rightarrow \sum f_n \text{ CVA sur } I$$
$$\stackrel{(1.)}{\Rightarrow} \sum f_n \text{ CVS sur } I$$

Exemple (Convergence Normale)

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^2 + n^3x^2} \end{cases}$$

$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$ car $f_n(x)$ est maximale lorsque x est maximal
or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple (Convergence Absolue)

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^2 + n}{n^3} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{x^2+n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2} \text{ donc } \sum |f_n(x)| \text{ CV, i.e. } \sum f_n \text{ CVA sur } \mathbb{R}.$$

Proposition 5

$$\sum f_n \text{ CVN sur } I \Longrightarrow \sum f_n \text{ CVU sur } I.$$

Preuve 5

$\sum f_n$ CVN sur $I \Longrightarrow \sum f_n$ CVS sur I, ainsi $\forall x \in I \quad \sum f_n(x)$ CV.
Montrons que (R_n) CVU vers la fonction nulle sur I

$$\forall x \in I \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

$$\text{donc } \|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \quad \text{or } \sum \|f_k\|_\infty \text{ CV (car } \sum f_n \text{ CVN sur } I)$$

$$\text{donc son reste } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc } \|R_n\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{donc } \sum f_n \text{ CVU sur } I.$$

REMARQUE

$$\begin{tikzcd}
& \text{CVU} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow, bend right, "\times"'] \arrow[dd, Rightarrow, shift left, "\times"] & \\
\text{CVN} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{CVS} \\
& \text{CVA} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow, bend left, "\times"] \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "\times"] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons illustrer les cas en rouge

Exemple (CVU $\not\Rightarrow$ CVN)

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

alors $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ CV (car série alternée vérifiant le critère spécial)

de plus $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{n+1+x} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ d'où $\sum f_n$ CVU vers $\mathbb{R}^+$

$\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right| = \frac{1}{n}$ or $\sum \frac{1}{n}$ DV, donc $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple (CVU $\not\Rightarrow$ CVA)

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{cases}$$

Soit $x \in [0,1]$

alors $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ CV (car série alternée vérifiant le critère spécial) donc $\sum f_n$ CVS sur $[0,1]$

Soit $x \in [0,1]$

on a $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$

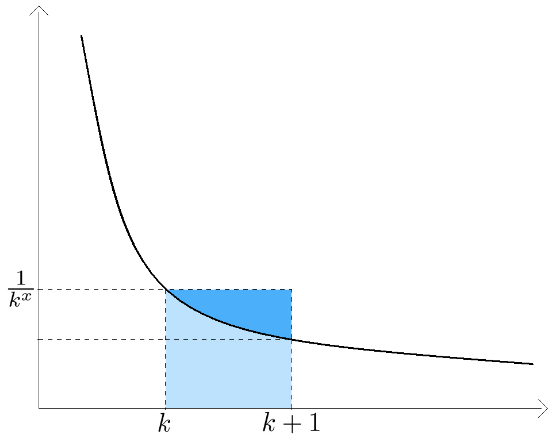
$\sum |f_n(1)| = \sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum f_n$ ne CV pas absolument sur $[0,1]$

Exemple (CVA $\not\Rightarrow$ CVU)

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\sum \frac{1}{n^x}$ CV $\iff x > 1$ donc $\sum f_n$ CVS sur $]1, +\infty[$
donc $\sum f_n$ CVA sur $]1, +\infty[$ car $\forall x \in]1, +\infty[\ \ |f_n(x)| = f_n(x)]$



Montrons que $(R_n(x))$ ne CV pas uniformément vers 0 sur $]1, +\infty[$
Soit $x \in]1, +\infty[$

$t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$

donc $|R_n(x)| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x} dt$

$R_n(x) \geqslant \dfrac{1}{1-x} \left[t^{1-x}\right]_{n+1}^{+\infty} = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}$

d'où $R_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} = n \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 1$ d'où $R_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \not\to 0$

donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

Proposition 6

Soient $\sum f_n$ et $x_0 \in I$ tels que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ continue en } x_0 \quad (\text{resp. sur } I) \\ \sum f_n \text{ CVU sur } I \end{cases}$

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en x_0 (resp. sur I).

Preuve 6

Par hypothèse (S_n) CVU sur I $\left(\text{vers } S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ S_n$ continue en x_0
Donc via un THM sur les suites de fonctions, on a S continue en x_0.

Proposition 7

Soit $\sum f_n$ où $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ continue sur } [a,b] \\ \sum f_n \text{ CVU sur } [a,b] \end{cases}$

alors $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Preuve 7

(S_n) CVU $\left(\text{vers } S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$ sur $[a,b]$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n$ continue sur $[a,b]$.
Donc en vertu d'une proposition sur les suites de fonctions, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx$$

i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$$

Proposition 8

Soit $\sum f_n$ telle que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \sum f_n \text{ CVS sur } I \\ \sum f_n \text{ CVU sur } I \end{cases}$

alors $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Preuve 8

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n$ de classe C^1 sur I
(S_n) CVS $\left(\text{vers } S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$ sur I
(S_n') CVU sur I
donc $S' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ i.e. $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Exercice

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos x}dx = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$

Rappel (Wallis) : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)dt = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$

Preuve (Wallis)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\cos(t)dt$

$$\begin{cases} u(t) = \cos^{n-1}(t) & \Longrightarrow & u'(t) = -(n-1)\cos^{n-2}(t)\sin(t) \\ v(t) = \sin(t) & \Longleftarrow & v'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \underbrace{\left[\cos^{n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + (n-1)\int_0^{\pi} 2\cos^{n-2}(t)\underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2 t}dt \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{n\cdot I_n = (n-1)\cdot I_{n-2}}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} \\ I_{2p-2} &= \frac{2p-3}{2p-2}I_{2p-4} \\ &\vdots \\ I_2 &= \frac{1}{2}I_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & I_{2p} = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2p)}I_0 \\ & \text{or } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } I_{2p} &= \frac{(2p)!}{[2\times 4\times 6\times\ldots\times(2p)]^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{[(2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)\times\ldots\times(2\times p)]^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Solution (Exercice)

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos x}dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi\text{-périodicité}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\cos x}dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parité}}}{=} 2\int_0^{\pi} e^{2\cos x}dx$$

$$\left[\text{RAPPEL} : \forall x\in\mathbb{R}\quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right]$$

$$e^{2\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\cos x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n!}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos x}dx = 2\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n!}dx$$

or $\begin{cases} f_n : \begin{cases} [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2^n \cos^n x}{n!} \end{cases} \quad \text{continue sur } [0,\pi] \\ \sum f_n \text{ CVN donc CVU sur } [0,\pi] \end{cases}$ $\left(\text{en effet, } \sum \|f_n\|_\infty = \sum \dfrac{2^n}{n!} \text{ CV } \textbf{(D'Alembert)}\right)$

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos x} dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{2^n \cos^n x}{n!} dx = 2\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{2^{2p}\cos^{2p} x}{(2p)!} dx + \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{2^{2p+1}\cos^{2p+1} x}{(2p+1)!} dx\right)$

or $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2p+1} x\, dx \overset{u=\pi-x}{=} \int_{\pi}^{0} \cos^{2p+1}(\pi-u)(-du) = \int_0^{\pi} -\cos^{2p+1} u\, du = -\int_0^{\pi} \cos^{2p+1} u\, du$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2p+1} x\, dx = 0$

et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2p} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p} x\, dx$

or $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p} x\, dx \overset{u=\pi-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2p} x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx$

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos x} dx = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}}{(2p)!} \cdot 2\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p!)^2}$

Théorème 1 : Kantorovitch

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ telle que $(f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^2$.
Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes à cœfficients entiers (i.e. dans $\mathbb{Z}$).

Preuve 1

Soit $g : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - (f(1)x - f(0)(1-x)) \end{cases}$

Alors g est continue sur $[0,1]$ (de plus, $g(0) = g(1) = 0$)

On a $\|g - B_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (*cf* Bernstein)

$$\left[B_n(g) : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \end{cases} \right]$$

Notons $A_n(g) : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k} \end{cases}$

et $\quad C_n(g) : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A_n(g) + f(1)x + f(0)(1-x) \end{cases}$

deux polynômes à cœfficients entiers.

Montrons que :

1. $\|A_n(g) - B_n(g)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. $\|g - A_n(g)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $\|f - C_n(g)\|_\infty = \|g - A_n(g)\|_\infty$

1. Soit $x \in [0,1]$

$$|A_n(g)(x) - B_n(g)(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

or $g(0) = g(1) = 0$

$$\text{donc } |A_n(g)(x) - B_n(g)(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \left(E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right) - C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left|E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right) - C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leqslant 1} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k}$$

or $\forall k \in [[1..n-1]]$, $C_n^k \geqslant n$, i.e. $1 \leqslant \dfrac{C_n^k}{n}$

$$\text{donc } |A_n(g)(x) - B_n(g)(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}_{=1}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. $$\|g - A_n(g)\|_\infty = \|g - B_n(g) + B_n(g) - A_n(g)\|_\infty$$

$$\leqslant \underbrace{\|g - B_n(g)\|_\infty}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\|B_n(g) - A_n(g)\|_\infty}_{\longrightarrow 0}$$

3. Soit $x \in [0,1]$

$$|f(x) - C_n(f)(x)| = |f(x) - (A_n(g)(x) + f(1)x + f(0)(1-x))|$$

$$\underset{\text{déf de } g}{=} |g(x) + f(1)x + f(0)(1-x) - A_n(g)(x) - f(1)x - f(0)(1-x)|$$

d'où $\|f - C_n(f)\|_\infty = \|g - A_n(g)\|_\infty$ or $\|g - A_n(g)\|_\infty \longrightarrow 0$

d'où $\|f - C_n(f)\|_\infty \longrightarrow 0$

Exercice 1

$$\sum f_n \text{ où } f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x} \end{cases}$$

1. CVS, CVA, CVU de $\sum f_n$?
2. Soit $x > 1$. Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

   Montrer que $S(x) = \dfrac{T(x)}{1 - 2^{1-x}}$

Solution 1

1. ✘ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

   alors $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ CV (car série alternée vérifiant le critère spécial)

   donc $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$

   ✘ $\displaystyle\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^x} \right| = \sum \frac{1}{n^x}$ CV $\iff x > 1$

   donc $\sum f_n$ CVA sur $]1, +\infty[$

   ✘ Comme $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ vérifie le critère spécial, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)^x}$

   mais $\forall x \in [a, +\infty[$ où $a > 0$, on a $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

   donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

   donc $\sum f_n$ CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$ si $a > 0$.

2. $S(x) - T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x} S(x)$

   donc $S(x) = \dfrac{T(x)}{1 - 2^{1-x}}$

Exercice 2

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}} \end{cases}$$

Solution 2

(f_n) CVS vers $f : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

or $f_n'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x) \neq \Big(\underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)}_{\substack{\| \\ f'(x)}}\Big)'$ (*cf* f non dérivable en 0)

et pourtant (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$ (mais U n'est pas suffisant $\longrightarrow$ *cf* THM).

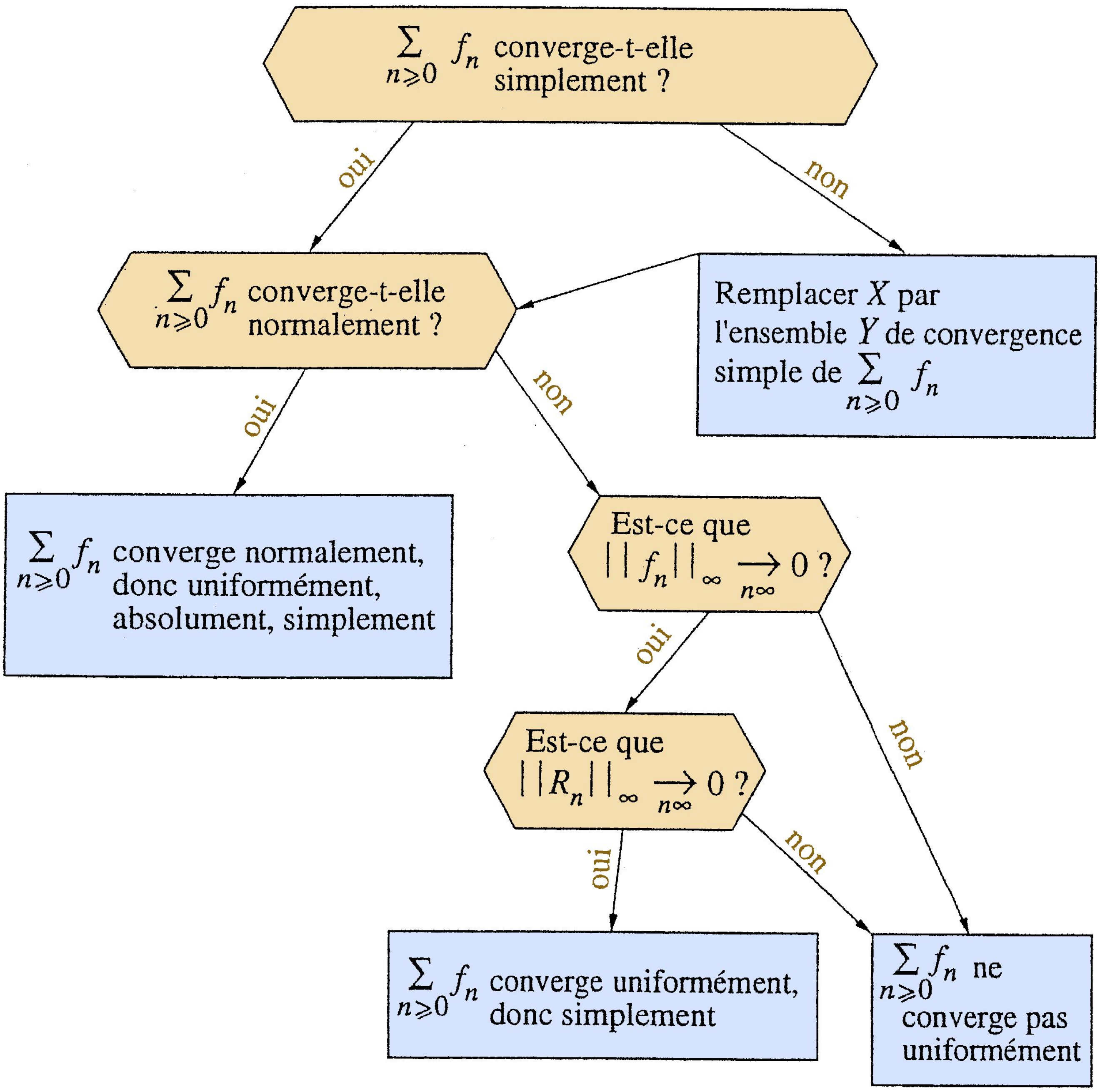
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

d'où (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Plan sommaire pour l'étude d'une série d'applications

Il s'agit d'étudier, sur un exemple donné, les convergences d'une série d'applications $\sum_{n\geqslant 0}(f_n : X \longrightarrow E)$. On peut proposer le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :



Dans le cas où il n'y a pas convergence normale ou uniforme de $\sum_{n\geqslant 0}$ sur X, on indiquera des parties de X sur lesquelles il y ait convergence normale ou uniforme.